DÉPARTEMENT DE LA FORMATION, DE LA JEUNESSE ET DE LA CULTURE
DIRECTION GÉNÉRALE DE L'ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

Trigonométrie dans le triangle rectangle

Apprentissages visés (PER MSN 34-35 Grandeurs et mesures) :
- utilisation de la proportionnalité des figures semblables ;
- calcul d'une grandeur manquante à partir de celles qui sont connues.

Apprentissage complémentaire : trigonométrie dans le triangle rectangle
Attente fondamentale : dans un triangle rectangle, calculer une grandeur manquante à l'aide des rapports trigonométriques.

Quelques notes historiques sur la trigonométrie
La trigonométrie (du grec *trigone* «triangle» et *metron* «mesure») est la science de la mesure des triangles. Elle a pour but d'établir des relations entre les longueurs des côtés et les mesures des angles d'un triangle.
Elle a été inventée par des astronomes de l'Antiquité, dont Hipparque de Nicée (vers 140 av. J.-C.), pour mesurer des longueurs qui leur étaient inaccessibles directement (hauteur d'une montagne, distance de la Terre au Soleil), pour repérer la position des étoiles sur la voûte céleste et pour prévoir les phénomènes astronomiques réguliers (retour des saisons, déplacement des planètes). Malheureusement, les travaux de ces savants n'ont pas été retrouvés. Le mathématicien indien Aryabhata (Ve siècle) fut le premier à établir des tables de sinus (c'est-à dire de demi-cordes) et de cosinus (sinus de l'angle complémentaire). Elles furent complétées plus tard par des tables de tangentes et de cotangentes.
La trigonométrie est utilisée de nos jours dans de nombreux domaines : l'arpentage, la navigation maritime et aérienne, la mécanique, l'électricité, l'optique géométrique…

1. QUEL RAPPORT ?

Construis deux triangles rectangles différents *ABC* et *EFG*, tels que :

- premier triangle : $\widehat{ABC} = 90°$ et $\widehat{BAC} = 40°$;
- second triangle : $\widehat{EFG} = 90°$ et $\widehat{FEG} = 40°$.

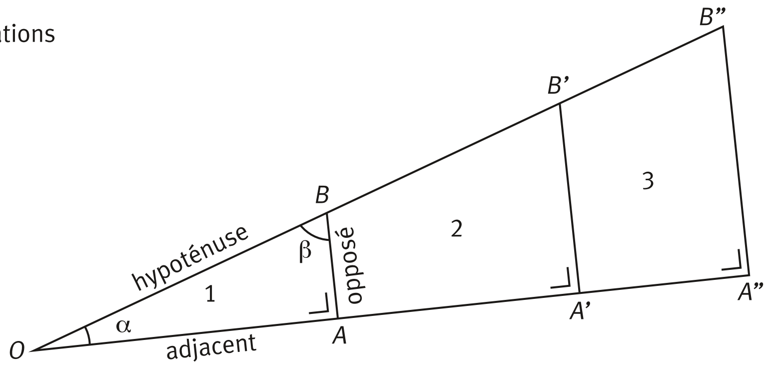
Détermine les rapports suivants :

- premier triangle : $\frac{BC}{AC}$; $\frac{AB}{AC}$; $\frac{BC}{AB}$;
- second triangle : $\frac{FG}{EG}$; $\frac{EF}{EG}$; $\frac{FG}{EF}$.

Que remarques-tu ?

2. SINUS, COSINUS ET TANGENTE

a) Complète le tableau à l'aide des informations que tu peux recueillir sur cette figure :



	MESURES DES CÔTÉS			RAPPORTS		
	opposé	adjacent	hypoténuse	sin α	cos α	tan α
triangle	*AB ; A'B' ; A"B"*	*OA ; OA' ; OA"*	*OB ; OB' ; OB"*	$\frac{\text{opposé}}{\text{hypoténuse}}$	$\frac{\text{adjacent}}{\text{hypoténuse}}$	$\frac{\text{opposé}}{\text{adjacent}}$
1						
2						
3						

b) Que constates-tu ?

c) Essaie de déterminer, de la même manière, sin β, cos β, tan β et compare tes résultats avec ceux de ton voisin.

3. AVEC LA CALCULATRICE

Arriveras-tu à compléter ces tableaux avec l'aide de ta calculatrice ?

a)

α	sin α
75°	
	0,2
	2

b)

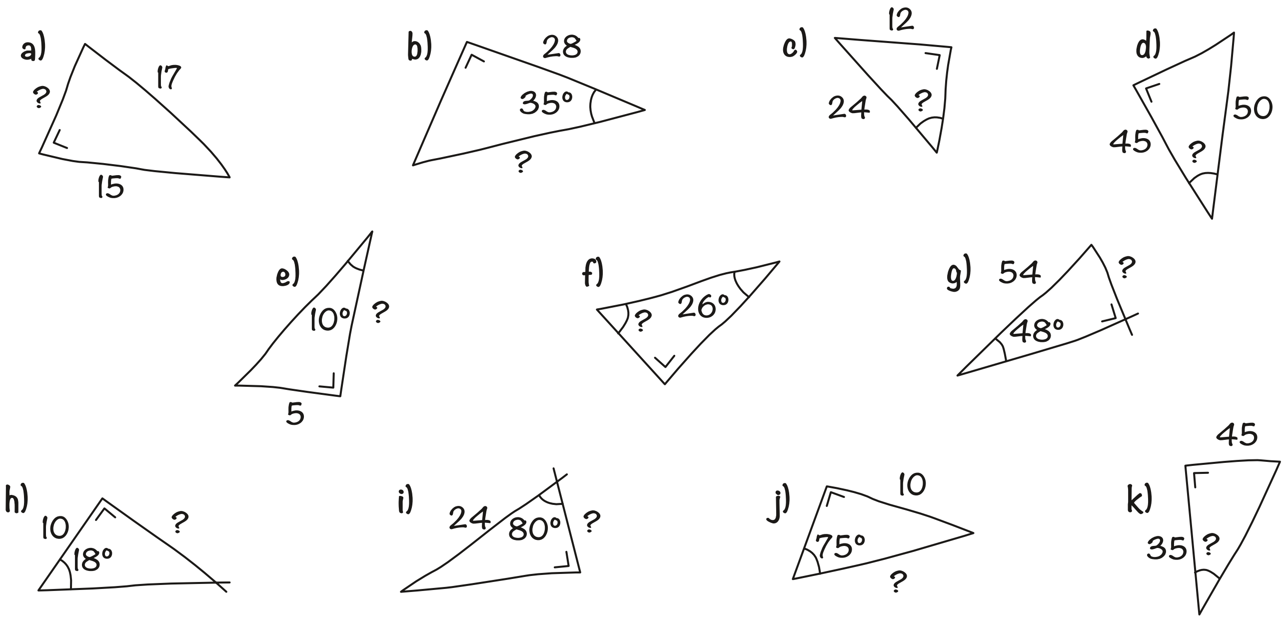
α	cos α
32°	
	0,6
	1,2

c)

α	tan α
57°	
	0,3
	3

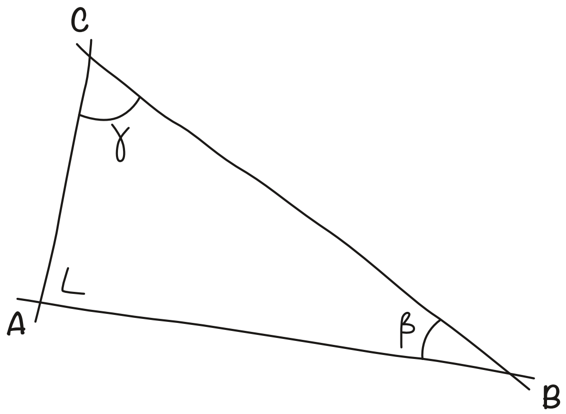
4. À PARTIR DE CROQUIS

Calcule les mesures demandées (longueurs exprimées en cm) :



5. CÔTÉS ET ANGLES

Complète le tableau suivant (longueurs exprimées en cm) :



	AB	*BC*	*AC*	β	γ
a)	3,2	5,6			
b)		5	4		
c)	2,5		4,8		
d)	4				40°
e)			5		65,5°
f)		45		74°	

6. ET LES ANGLES ?

D'un triangle *ABC* rectangle en *C*, on connaît $AC = 2{,}5$ m et $BC = 35$ cm.
Calcule les mesures des angles de ce triangle.

7. À LA RAME

Jack traverse le lac de Thoune à la rame, en direction de Gwatt. Muni de son sextant, il croit distinguer un phare d'une hauteur de 25 m, sous un angle de 3°.
Quelle distance lui reste-t-il à parcourir à la force de ses biceps avant d'atteindre la rive ?

8. L'ÉCHELLE

Une échelle de 7,5 m de longueur est appuyée contre un mur. Elle atteint une hauteur de 6,6 m.
Quel angle fait-elle avec le sol ?

9. LA GRUE

D'une fenêtre, l'œil d'un observateur situé à 9 m au-dessus du sol vise le pied et le sommet d'une grue de chantier.
Le pied de la grue se situe à 13° au-dessous de l'horizontale, alors que son sommet se situe 58° au-dessus.
Quelle est la hauteur de la grue ?

10. LE TÉLÉPHÉRIQUE

Un téléphérique se déplace à une vitesse moyenne de 7 m par seconde et la durée de son parcours est de 4 minutes et 20 secondes.
Lorsque, de la station inférieure, on regarde la station supérieure, le rayon visuel fait un angle de 19° avec l'horizontale.
Quelle est l'altitude de la station supérieure, si la station inférieure est à 1315 m ?

11. TRÈS RAIDE !

Quel angle une pente de 25 % détermine-elle avec l'horizontale ?

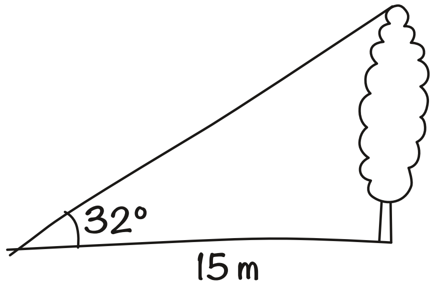
12. MARCHE À L'OMBRE

Il est minuit et tu marches le long d'un trottoir. Tu passes alors à l'aplomb d'un éclairage public dont l'ampoule se situe à 4 m du sol.

a) A quelle distance du pied de ce lampadaire te situeras-tu lorsque ton ombre égalera ta taille ?
b) Et quelle sera cette distance si ton ombre mesure 15 m ?
c) Quelle sera la mesure de ton ombre, si l'angle formé par le rayon lumineux passant par le sommet de ta tête et le sol mesure 18° ?

Faire le point

1. Pour déterminer la hauteur d'un arbre, j'ai effectué ces deux mesures.
   Est-ce suffisant ?

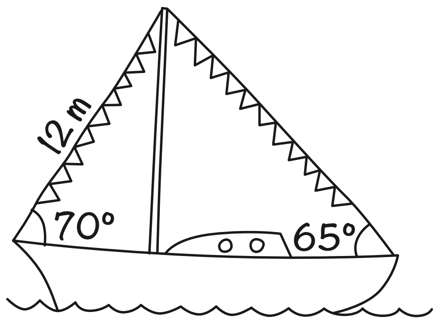


2. Pour décorer son voilier, le capitaine a tendu deux cordes portant des fanions.

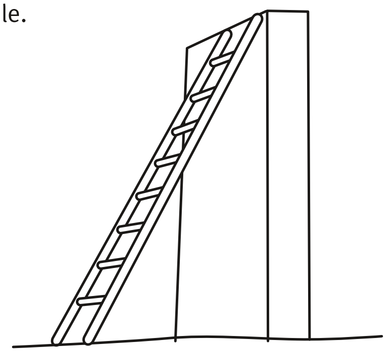
   Calcule
   a) la hauteur du mât ;

   b) la longueur du bateau ;

   c) la longueur totale des cordes utilisées.



3. Pour être stable, une échelle doit former un angle de 70° à 75° avec l'horizontale.
   Est-ce le cas ici, si l'échelle mesure 325 cm et le mur 3 m de haut ?



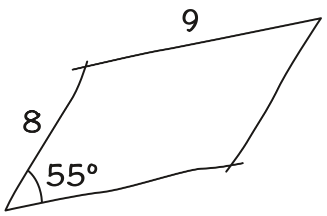
▸ Corrigé en fin de fascicule

Encore quelques problèmes

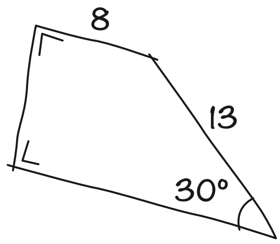
13. AUSSI DES QUADRILATÈRES

Calcule l'aire des quadrilatères suivants (longueurs exprimées en cm) :

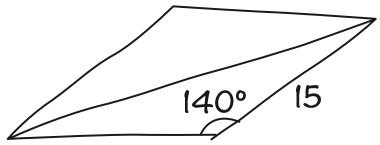
un parallélogramme



un trapèze rectangle



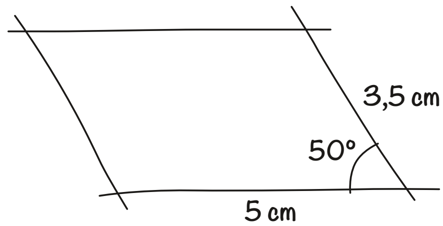
un losange



14. LA BASE D'UN PRISME

Voici un croquis d'un parallélogramme qui est la base d'un prisme droit de 6 cm de hauteur.

Quelle est l'aire totale et quel est le volume de ce prisme ?



15. UNE NAPPE OCTOGONALE

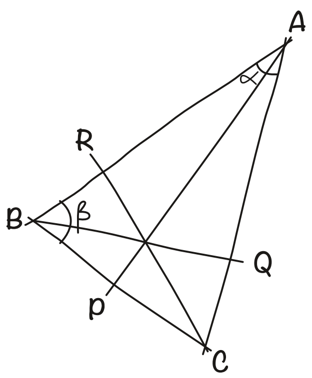
Dans une pièce de tissu carrée de 1,20 m de côté, tu désires découper une nappe en forme d'octogone régulier.
Quelle sera la plus grande longueur que tu peux obtenir pour le côté de l'octogone régulier ?

16. ENCORE UN TRIANGLE ISOCÈLE

Dans un triangle isocèle *ABC*, on connaît *AB* = *AC* = 25 cm et *BC* = 12 cm.
Quelle est la longueur du rayon de son cercle circonscrit ?

17. AVEC DES HAUTEURS

Dans cette figure, *ABC* est un triangle isocèle.
AP, *BQ* et *CR* sont les trois hauteurs.



Complète le tableau suivant (longueurs exprimées en cm) :

	α	β	*BC*	*AB=AC*	*AP*	*BQ=RC*
a)			9,3			7,8
b)	65°			35		
c)			47		51	
d)		29°		17,5		

18. BONJOUR LES TOURISTES !

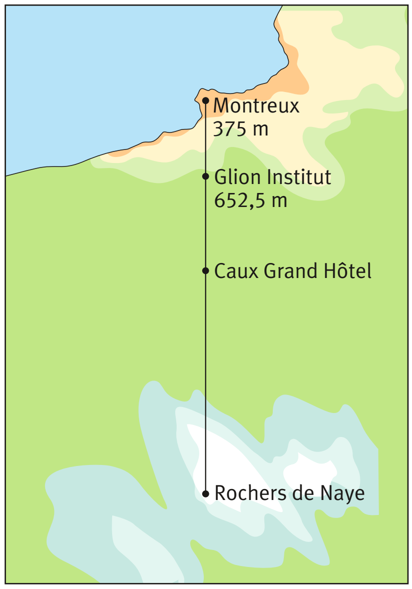
Un touriste se promène sur les quais de Montreux et admire le paysage «dans l'alignement» Glion Institut – Caux Grand Hôtel – Rochers de Naye.

Le rayon visuel fictif reliant le touriste aux Rochers de Naye forme un angle de 17,3° avec l'horizontale.

a) Quelle est l'altitude du point qu'il observe sur les Rochers de Naye ?

b) Doit-il lever ou baisser légèrement les yeux pour observer l'Institut de Glion ?

c) Si le rayon visuel fictif qui relie le touriste au faîte du toit du Grand Hôtel de Caux mesure 17°, quelle est la différence d'altitude entre celui-ci et l'Institut de Glion ?



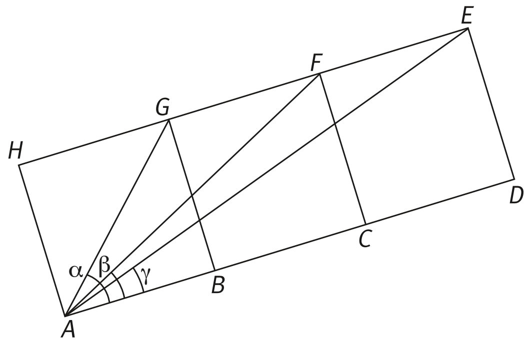
Echelle 1 : 100 000

19. LE DOUBLE

Est-il vrai qu'un triangle rectangle dont l'hypoténuse mesure le double de l'un des deux côtés de l'angle droit est la moitié d'un triangle équilatéral ?

20. TROIS CARRÉS IDENTIQUES

Le rectangle *ADEH* est formé de trois carrés identiques.
Combien mesure la somme $\alpha + \beta + \gamma$?

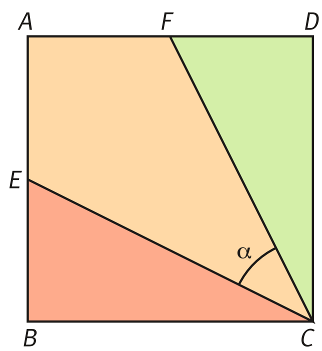


21. LE PARTAGE DU POTAGER

Aloys a partagé en trois parties son potager de forme carrée, à l'aide de deux piquets (*E* et *F*) et d'un peu de ficelle.
Il offre la première partie (*BCE*) à Lucette pour y planter des carottes et la deuxième (*CDF*) à André pour y mettre des salades.

Quant à lui, il conserve la troisième (*CFAE*) pour ses citrouilles.

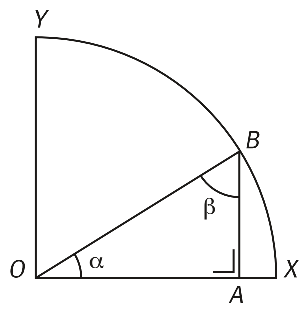
Quelle est la part de chacun et que vaut l'angle α, si les piquets *E* et *F* sont plantés aux milieux des côtés *AB* et *AD* ?



Pour aller plus loin

22. QUELQUES RAPPORTS TRIGONOMÉTRIQUES

Le sommet *B* du triangle rectangle *OAB* se «promène» sur l'arc $\overset{\frown}{XY}$ d'un quart de cercle, de centre *O* et de rayon *OB* = 1.
Sans utiliser ta calculatrice, ni une table de rapports trigonométriques, complète le tableau suivant :



	mesure de l'angle α				
	0°	30°	45°	60°	90°
sin α					
cos α					
tan α					

En observant tes résultats, arriveras-tu à déterminer les relations qui existent entre les rapports trigonométriques des angles α et β ?

23. INTERSECTION DE DEUX DISQUES

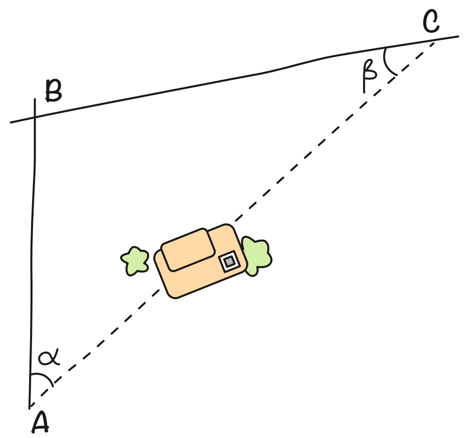
Deux disques c_1 et c_2, respectivement de centres *A* et *B*, ont tous les deux un rayon de 10 cm.
Calcule le périmètre et l'aire de leur intersection quand :
a) *AB* = 10 cm ;
b) *AB* = 12 cm

24. OBSTACLE

Un géomètre doit déterminer la distance de *A* à *C*.
Sur le terrain, un bâtiment situé entre ces deux points l'empêche d'utiliser son ruban métrique.

Il effectue alors trois mesures :
- en visant le point *B*, depuis *A* et *C*, il obtient :
  $\alpha = 32°$ et $\beta = 38°$;
- à l'aide d'un ruban métrique, il trouve *AB* = 255 m.

Comment va-t-il alors déterminer la distance *AC* et que va-t-il trouver ?



25. TERRE – LUNE

a) A quelle distance du centre de la Terre un astronaute verra-t-il la Lune et la Terre sous le même angle, s'il se trouve entre les deux astres ?
b) Quelle est la mesure de cet angle ?
c) Sous quel angle de vue vois-tu la Lune depuis la Terre ?

Découpe cette page et colle-la à la page 188 de ton aide-mémoire.

Trigonométrie dans le triangle rectangle

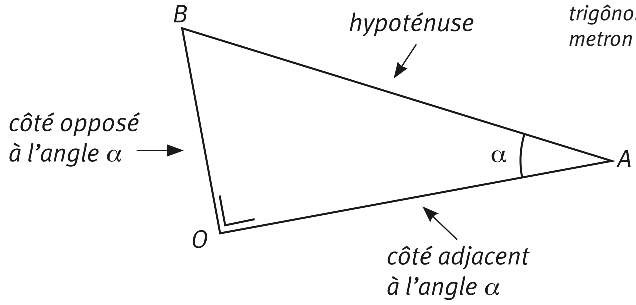
VOCABULAIRE

Dans ce triangle rectangle en O :

AB est l'hypoténuse ;

AO est le côté adjacent à l'angle α ;

OB est le côté opposé à l'angle α.



trigonométrie
trigônon (grec) : triangle
metron (grec) : mesure

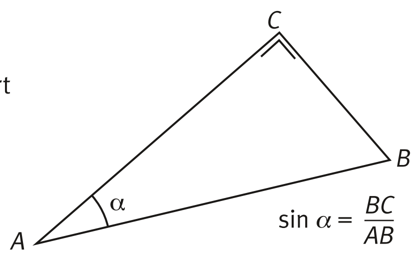
SINUS, COSINUS ET TANGENTE

Dans tout triangle rectangle :

le sinus d'un angle aigu est égal au rapport

$$\frac{\textbf{longueur du côté opposé à cet angle}}{\textbf{longueur de l'hypoténuse}}$$

sin-opp-hyp : sinus = $\frac{\text{opposé}}{\text{hypoténuse}}$



sinus
cosinus
sinus (latin) : le creux, le pli, la courbe
cum (latin) : avec

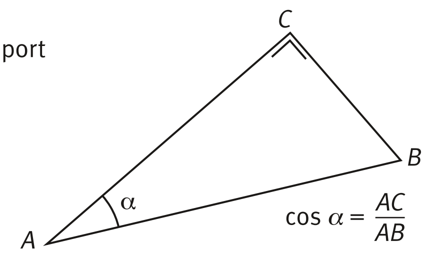
Remarques
Lorsqu'on cherche la mesure d'un angle dont on connaît le sinus, on utilise sur une machine à calculer la fonction SIN^{-1}, ou INV SIN, ou ARC SIN, ou 2nd SIN, ou...

On procède de manière analogue pour déterminer la mesure d'un angle dont on connaît le cosinus ou la tangente.

le cosinus d'un angle aigu est égal au rapport

$$\frac{\textbf{longueur du côté adjacent à cet angle}}{\textbf{longueur de l'hypoténuse}}$$

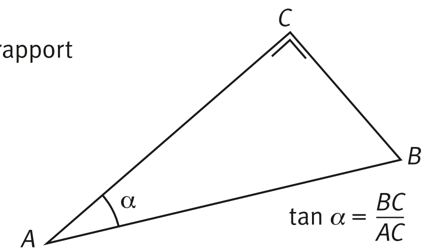
cos-adj-hyp : cosinus = $\frac{\text{adjacent}}{\text{hypoténuse}}$



la tangente d'un angle aigu est égale au rapport

$$\frac{\textbf{longueur du côté opposé à cet angle}}{\textbf{longueur du côté adjacent à cet angle}}$$

tan-opp-adj : tangente = $\frac{\text{opposé}}{\text{adjacent}}$



CORRIGÉ DU FLP

1) Hauteur de l'arbre = $15 \cdot \tan 32° \cong 9{,}37$ m $\cong$ **9 m**

2) a) Hauteur du mât = $12 \cdot \sin 70° \cong$ **11,28 m**

   b) Longueur du bateau $\cong 12 \cdot \cos 70° + \dfrac{11{,}28}{\tan 65°} \cong 4{,}10 + 5{,}26 \cong$ **9,36 m**

   c) Longueur totale des cordes $\cong 12 + \dfrac{11{,}28}{\sin 65°} \cong 12 + 12{,}45 \cong$ **24,45 m**

3) 3 m = 300 cm et $\sin \alpha = \dfrac{300}{325}$, donc $\alpha \cong 67{,}38° \cong 67°$. L'échelle n'est **pas stable.**

La plupart des activités de ce fascicule sont tirées de :
Chastellain M., Calame J.-A., Brêchet M., «Mathématiques 7-8-9», © CIIP-LEP, Editions 2003, 2006 et 2009 :
Grandeurs et Mesures Analyse de données, Trigonométrie dans le triangle rectangle, pages 67 à 74 ;
Aide-mémoire, pages 107 et 108.

Adaptation et rédaction : Sandrine Rudaz
Coordination : Yolande Berga
Responsable d'unité : Anne Christe de Mello

philippecasse.ch

CADEV 26425

TRIGONOMÉTRIE DANS LE TRIANGLE RECTANGLE